Théorème d'inversion locale

Théorème : Soit E, F des Banach, $a \in E$ et $f = E \to F$ une application $\mathcal{C}^1$. Si $d_a f$ est inversible, il existe $V \subset E$ et $W \subset F$ des voisinages ouverts de a et $f(a)$ tels que $f_{|V} : V \to W$ soit un $\mathcal{C}^1$ difféomorphisme.

Preuve du théorème : On peut commencer par supposer que $a = f(a) = 0$ et $d_a f = \mathrm{Id}_E$. En effet, si le résultat est vrai dans ce cas, l'application $x \mapsto d_a f^{-1}(f(x+a) - f(a))$ est un $\mathcal{C}^1$ difféomorphisme localement donc sa composée avec f est comme voulue (on remarque alors que $F = E$).

Comme f est $\mathcal{C}^1$ il existe $r > 0$ tel que

$$\forall x \in B_r := \overline{B(0,r)}, ||d_x f - d_0 f|| \leq \frac{1}{2}.$$

Si $x \in B_r$ on peut écrire $d_x f = \mathrm{Id} + (d_x f - \mathrm{Id})$ et comme $||d_x f - \mathrm{Id}|| < 1$ on sait que $d_x f$ est inversible d'inverse $\mathrm{Id} + u + u^2 + \ldots$, où $u = d_x f - \mathrm{Id}$, et $||d_x f^{-1}|| \leq 2$ (sous-multiplicativité de la norme d'opérateur).

<u>Étape 1 : Montrons qu'il existe $V, W \subset E$ tels que $f_{|V} : V \to W$ soit bijective</u>

Soit $y \in \dfrac{B_r}{2}$ (notre W potentiel !). On note $h : x \in B_r \mapsto y + x - f(x) \in E$. Elle est $\mathcal{C}^1$ clairement et par l'inégalité des accroissements finis on

$$||h(x) - h(x')|| \leq \frac{||x - x'||}{2} \text{ pour tout } x, x' \in B_r.$$

On a alors en particulier $||h(x) - h(0)|| = ||x - f(x)|| \leq \dfrac{||x||}{2} \leq \dfrac{r}{2}$ et donc finalement $||h(x)|| \leq ||y|| + ||x - f(x)|| \leq \dfrac{r}{2} + \dfrac{r}{2} = r$. Ainsi, h arrive dans B_r. Comme h est contractante, par le théorème de point fixe de Banach il existe un unique élément $x \in B_r$ point fixe de h. On a donc $f(x) = y$ pour un tel élément et donc y admet un unique antécédent par f. En posant $V = f^{-1}\left(\dfrac{B_r}{2}\right) \cap B_r$ (on prend l'intersection avec B_r pour ne pas retrouver d'autres antécédents des éléments de $\dfrac{B_r}{2}$) et $W = \dfrac{B_r}{2}$, on a montré ce que l'on voulait !

<u>Étape 2 : L'application inverse $g : W \to V$ est continue</u>

Soit $h : x \mapsto x - f(x)$ (c'est bien l'application h précédente avec $y = 0$). On a

$$\begin{aligned} ||x - x'|| &= ||h(x) + f(x) - h(x') - f(x')|| \\ &\leq ||h(x) - h(x')|| + ||f(x) - f(x')|| \\ &\leq \frac{||x - x'||}{2} + ||f(x) - f(x')|| \end{aligned}$$

d'où $||x - x'|| \leq 2||f(x) - f(x')||$ et donc g est lipschitzienne donc continue.

Étape 3 : Montrons que g est $\mathcal{C}^1$

La difficulté réside dans le fait de montrer que g est différentiable. En effet, si c'est le cas le seul candidat possible pour la différentielle de g est df^{-1}, qui est continue par hypothèse. Montrons donc que g est différentiable.

Soit $y \in W$ et $x \in V$ tels que $g(y) = x$. Soit w tel que $y + w \in W$ (w est donc une petite perturbation).
On note $v = g(y + w) - g(y)$. On a vu que g est 2-lipschitizienne donc $||v|| \leq 2||w||$. Pour montrer que g est différentiable, il est naturel de regarder $\Delta(w) = g(y + w) - g(y) - d_x f^{-1}(w)$. Si $\Delta(w) \underset{w \to 0}{=} o(w)$, on a gagné par définition car $d_x f^{-1}$ est linéaire. On a

$$\begin{aligned}
\Delta(w) &= (v + x) - x - d_x f^{-1}(f(v + x) - f(x) \\
&= d_x f^{-1}(d_x f(v)) - d_x f^{-1}(f(v + x) - f(x)) \\
&= d_x f^{-1}(d_x f(v) - f(v + x) + f(x))
\end{aligned}$$

Mais par le début de la preuve on sait que $||d_x f^{-1}|| \leq 2$ donc $||\Delta|| \leq 2||v||\varepsilon(v)$ avec $\varepsilon(v) \underset{||v|| \to 0}{\to} 0$ comme f est différentiable. En réutilisant le fait que g est 2-lipschitizienne il vient

$$\begin{aligned}
||\Delta(w)|| &\leq 2(2||w||)\varepsilon(g(y + w) - g(y)) \\
&\leq 4||w||\varepsilon'(w)
\end{aligned}$$

où $\varepsilon'(w) \underset{w \to 0}{\to} 0$ car $g(y + w) - g(y) \underset{w \to 0}{\to} 0$ comme g est continue. Finalement, g est différentiable en y et $d_y g = d_x f^{-1}$ pour tout y donc g est $\mathcal{C}^1$. $\square$

Remarques importantes :

- Il faut bien avoir l'énoncé du théorème de point fixe en tête
- Attention à bien comprendre la raison pour laquelle on se ramène au cas $a = f(a) = 0$ et $d_a f = \mathrm{Id}_E$